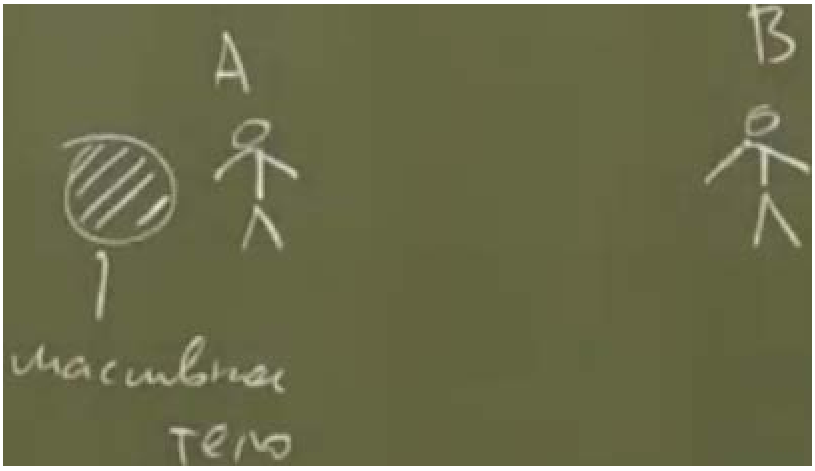
Оказывается, если взять сферическую СК и в её центр поместить тело точечное массой М, то метрика будет:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dct^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

Где $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ – гравитационный радиус Шварцшильда.
Замечание 1) Почему именно такая? Чтобы её **вывести**, нужно уравнение Эйнштейна и знание тензоров Риччи всяких. Будем считать, что нам её вывели умные дяди, а наша задача – найти геодезическую.
Замечание 2) Будем считать, что $r > r_g$, чтобы у нас не было всяких неопределённостей.

Пример.
Рассмотрим двух наблюдателей у массивного объекта:

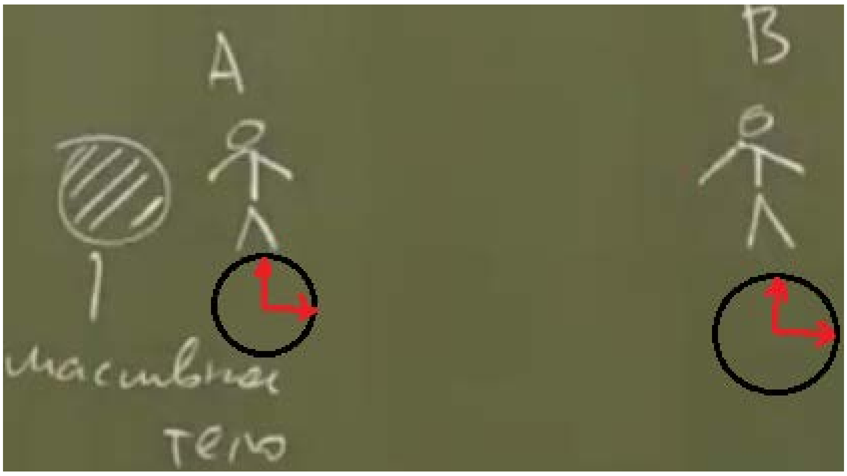


Они покоятся (т.к. на них действует сила гравитации, предположим, что у каждого есть ракета с двигателем, которая как раз создаёт ускорение, противоположное гравитационному).

И добавим ещё третьего, С – расположенного настолько далеко, что будем считать, что он вне гравитационного поля.

Предположим, что они все синхронизировали часы, послав друг другу луч света. Они знают расстояние между друг другом, так что без труда смогут учесть время задержки, связанное с конечностью скорости света.

В начальный момент времени у всех 3 часа дня:



Что будет происходит дальше? А дальше у них, оказывается, время у них будет течь с разной скоростью. Докажем это!

Предложим наблюдателю из С подсчитать перемещения мировой линии А и В :

$$ds_A{}^2 = \sum_{l=0}^{3}\sum_{m=0}^{3} g_{lm}(A)dx^l(A)dx^m(B)$$

$$ds_B{}^2 = \sum_{l=0}^{3}\sum_{m=0}^{3} g_{lm}(B)dx^l(A)dx^m(B)$$

Т.к. они покоятся, нулевыми будут все dx^l и dx^m, кроме dct:

$$ds^2(A) = g_{00}(A)(dct)^2$$

$$ds^2(B) = g_{00}(B)(dct)^2$$

g_{00} у них разные. См. метрику Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dct^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

$$g_{00}(r) = 1 - \frac{r_g}{r}$$

$$g_{00}(A) = 1 - \frac{r_g}{r_A}, g_{00}(B) = 1 - \frac{r_g}{r_B}$$

Метрика Шварцшильда как раз относится к наблюдателю С, расположенному вдали от массивного тела (и ct – это «его» время). Пусть он отмерил какое-то время dct . Тогда $ds^2(A)$ и $ds^2(B)$ будут различны:

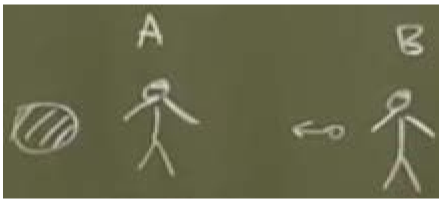
$$ds(A) = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_A}}dct, ds(B) = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_B}}dct,$$

Но в СК, связанной с А, $ds(A)$ - это просто собственное время, а в СК связанной с В, ds(В) - это также собственное время. Получаем, что время в разных точках гравитационного поля течёт по-разному:

$$d\tau_A = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_A}} dct, d\tau_B = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_A}} dct$$

Пример 2: гравитационное синее смещение

Пусть вновь у нас есть два пацана



и добавим к ним третьего, который находится настолько далеко, что будем считать, что гравитационного поля у него нет совсем.

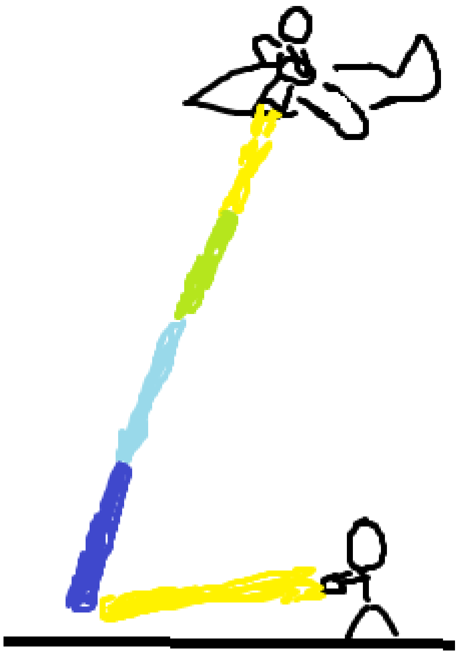
И В решил порадовать А периодическими вспышками света, время между которыми T_B.

Явление красного смещения состоит в том, что когда они достигнут наблюдателя А и он захочет измерить интервал между этими вспышками, он измерит T_A , которое окажется неравно T_B - как раз в силу того, что время у А и В течёт по разному.

То, что для наблюдателя С есть Т, то для наблюдателя В есть $T_B = T\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_B}}$, а для наблюдателя А есть $T_A = T\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_A}}$ (см. пример 1, где эти формулы получались). Т.к. $r_A < r_B$, то и $T_A < T_B$. Т.е. период уменьшается!

А почему смещение называется синим? Представим, что в роли сигналов синусоидальная э/м волна, где период – расстояние между соседними максимумами напряжённости Е. Тогда чем ближе мы к центру гравитации, тем меньше период и тем больше частота!

Поэтому смещение и синее, а не красное – оно частоту увеличивает. Вот такая картинка правильная:



а такая – нет:

Забавно, что это стыкуется с квантовой теорией фотонов: фотоны ускоряются, их энергия увеличивается, т.е. увеличивается частота.

Задача. Свет испущен из бесконечности прямо на массивное тело с частотой ω. На каком расстоянии его частота станет 2ω?

Решение.

$$T_{\text{кон}} = T_{\text{нач}}\sqrt{1 - \frac{r_g}{r_{\text{кон}}}}$$

При этом $T_{\text{кон}} = \frac{T_{\text{нач}}}{2} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{r_g}{r_{\text{кон}}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \frac{r_g}{r_{\text{кон}}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{r_g}{r_{\text{кон}}} = \frac{3}{4} \Rightarrow r_{\text{кон}} = \frac{4r_g}{3}$.